DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 4 heures)

Il est demandé aux candidats de rédiger avec le plus grand soin leurs démonstrations, d'encadrer les résultats obtenus ainsi que de souligner le ou les points qu'ils considèrent comme clés de leurs démonstrations.

Tout raisonnement vague ou incomplet ne sera pas pris en considération. De même, si un théorème du cours est utilisé, il faudra nécessairement en préciser les conditions d'application.

La partie IV est pour une large part indépendante de la partie III et pourra être traitée en admettant certains résultats de cette dernière.

Dans tout le problème $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{C}$. Si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note H^* son adjointe.

Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V, $[v_1, \ldots, v_k]$ désigne le sous-espace de V engendré par $v_1, \ldots, v_k$.

I - REDUCTION D'ENDOMORPHISMES :

1) Soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $H^* = -H$. Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unitaire, telle que $U^{-1}HU$ soit diagonale.

2) Soient H_1 et H_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $H_1^* = -H_1$, $H_2^* = H_2$ et $H_1H_2 = H_2H_1$. Montrer qu'il existe P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible, telle que $P^{-1}H_1P$ et $P^{-1}H_2P$ soient diagonales.

3) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^*A = AA^*$. Déduire de ce qui précède qu'il existe P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ε un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unitaire, telle que $U^{-1}MU$ soit triangulaire.

b) Montrer qu'il existe deux matrices diagonales D_1 et D_2 et une matrice $T = (t_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$(UD_1)^{-1} M(UD_1) = D_2 + T$$

avec $t_{ij} = 0$ pour $n \geqslant i \geqslant j \geqslant 1$

et $|t_{ij}| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant j > i \geqslant 1$.

5) Montrer que dans 3), P peut de plus être choisie unitaire.

II - QUOTIENT DE RAYLEIGH :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ représentant une application linéaire d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V dans lui-même, V étant muni de son produit hermitien canonique noté (.,.) .

On appelle quotient de Rayleigh de A l'application :

$$R_A : V - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$v \longrightarrow \frac{(Av,v)}{(v,v)}$$

On suppose dans la suite que A est hermitienne et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées par ordre croissant ainsi que $(p_1, \ldots, p_n)$ une famille orthonormale de vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Pour $k = 1, \ldots, n$, on note $V_k = [p_1, \ldots, p_k]$ et $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de V.

On pose de plus $V_o = \{0\}$ et $\mathcal{V}_o = \{V_o\}$.

1) Montrer que pour $k = 1, \ldots, n$:

$$\lambda_k = R_A(p_k) \ , \quad \lambda_k = \max_{v \in V_k} R_A(v) \quad \text{et} \quad \lambda_k = \min_{v \perp V_{k-1}} R_A(v) \ .$$

2) Montrer que pour $k = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{v \in W} R_A(v) \quad \text{et} \quad \lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{v \perp W} R_A(v)$$

3) Montrer que $\{R_A(v) \ ; \ v \in V\}$ est égal à l'intervalle réel $[\lambda_1, \lambda_n]$.

III - NORMES MATRICIELLES :

On dira que $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $\tilde{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\ ,\quad \tilde{N}(AB) \leqslant \tilde{N}(A)\ \tilde{N}(B)\ .$$

Soit N une norme sur $\mathbb{C}^n$.

On dira que la norme matricielle $\tilde{N}$ est subordonnée à N si pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\tilde{N}(A) = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ N(v) = 1}} N(Av)$.

On dira, tout simplement, qu'une norme matricielle $\tilde{N}$ est une norme subordonnée s'il existe une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\tilde{N}$ soit subordonnée à N.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

On pose $\rho(A) = \sup_{i = 1,\ldots,n} |\lambda_i|$.

1) Donner un exemple de norme matricielle non subordonnée.

2) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\tilde{N}$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\rho(A) \leqslant \tilde{N}(A)$.

3) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ε un réel strictement positif, montrer qu'il existe au moins une norme matricielle subordonnée $\tilde{N}$ telle que $\tilde{N}(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon$. (On pourra utiliser le I-4)).

4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(i) Pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\lim_{k \to +\infty} A^k v = 0$

(ii) $\rho(A) < 1$

(iii) $\tilde{N}(A) < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée .

5) Montrer que pour toute norme matricielle $\tilde{N}$ et toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lim_{k \to +\infty} [\tilde{N}(A^k)]^{1/k} = \rho(A)$.

6) Soit $\tilde{N}$ une norme matricielle subordonnée et B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\tilde{N}(B) < 1$. Montrer alors que la matrice $(I + B)$ est inversible et que $\tilde{N}[(I + B)^{-1}] \leqslant \dfrac{1}{1 - \tilde{N}(B)}$. Que subsiste-t-il lorsque $\tilde{N}$ n'est pas subordonnée ?

7) Montrer que si une matrice de la forme $I + B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas inversible alors $\tilde{N}(B) \geqslant 1$ pour toute norme matricielle $\tilde{N}$, subordonnée ou non .

IV - CONDITIONNEMENT :

On définit sur $\mathbb{C}^n$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les normes suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{i = 1, \ldots, n} |x_i|$$

On notera également $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui leur sont respectivement subordonnées.

Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée et A une matrice inversible, on note $\chi(A)$ la quantité $\|A\|\|A^{-1}\|$. Lorsque $\|.\|$ est l'une des normes précédemment définies, on écrit χ_1, χ_2 ou χ_∞ .

1) Montrer les propriétés suivantes pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

a) $\chi(A) \geqslant 1$, $\chi(A) = \chi(A^{-1})$ et $\chi(\alpha A) = \chi(A)$ pour tout α non nul dans $\mathbb{C}$.

b) $\chi_2(A) = \dfrac{\mu_n}{\mu_1}$ où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont les valeurs propres de A^*A rangées par ordre croissant .

c) Si $A^*A = AA^*$ alors $\chi_2(A) = \dfrac{\max\limits_i |\lambda_i|}{\min\limits_i |\lambda_i|}$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

d) Si U est unitaire alors $\chi_2(U) = 1$ et pour A inversible quelconque

$$\chi_2(AU) = \chi_2(UA) = \chi_2(A) \quad .$$

2) Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée et A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient b et b' deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et soient u et u' les solutions de

$$Au = b$$
$$Au' = b' \quad .$$

a) On suppose $b \neq 0$, montrer que

$$\frac{\|u' - u\|}{\|u\|} \leqslant \chi(A) \frac{\|b' - b\|}{\|b\|} \quad .$$

b) Montrer que l'on peut choisir $b \neq 0$ et $b' \neq b$ tels que l'inégalité précédente soit une égalité.

3) $\|.\|$ est toujours une norme matricielle subordonnée et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. A' est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{C})$ et b un vecteur de $\mathbb{C}^n$. u et u' vérifient :

$$Au = b$$
$$A'u' = b$$

On suppose $b \neq 0$, montrer que

$$\frac{\|u' - u\|}{\|u'\|} \leqslant \chi(A) \frac{\|A' - A\|}{\|A\|} .$$

4) Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée telle que pour toute matrice diagonale D,

$$\|D\| = \rho(D) \qquad (*)$$

Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ et P une matrice telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Montrer que pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{C})$ les valeurs propres de A + B sont contenues dans

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{où} \quad E_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leqslant \chi(P)\|B\|\} .$$

b) Vérifier que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ vérifient la condition (*) ci-dessus.

5) Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$. On note

$$\Gamma_2(A) = \text{Inf} \left\{\chi_2(P) : P^{-1}AP \text{ diagonale}\right\}$$

a) Montrer que, pour A dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^*A = AA^*$, on a $\Gamma_2(A) = 1$.

b) En déduire que pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{C})$ les valeurs propres de A + B sont dans

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leqslant \|B\|_2\}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A .

6) Soient A et B deux matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ rangées par ordre croissant.

a) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\beta_k \leqslant \lambda_k + \max_{v \in V_k} R_{B-A}(v)$$

où les V_k sont définis pour A comme au préambule du II.

b) En déduire que pour $1 \leqslant k \leqslant n$

$$|\lambda_k - \beta_k| \leqslant \|B - A\|_2 .$$